أمثلة :

1- لتكن S^2 كرة الواحدة في الفضاء الثلاثي :

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2+y^2+z^2=1\}$$

نعلم أن كرة الواحدة هي فضاء توبولوجي موصول ، و لنأخذ الخارطة (U_+, π_+)

حيث U_+ نصف الكرة العلوي المعرف بالشكل :

$$U_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \; ; \; z>0\}$$

$$\pi_+ : U_+ \longrightarrow \pi_+(U_+) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$$

نلاحظ أن U_+ مجموعة مفتوحة لأنها ناتجة من تقاطع الكرة S^2 مع النصف العلوي من الفضاء $\mathbb{R}^3$.

و أن $\pi_+(U_+)$ (الصورة المباشرة لـ U_+ وفق π_+) هي مجموعة مفتوحة و هي بالتحديد تمثل بالقرص الدائري المفتوح (قرص دائري نصف قطره 1 بدا محيطه) .

و أن π_+ تطبيق مستمر من المجموعة المفتوحة U_+ إلى $\pi_+(U_+)$ و هو تقابل (أحادي و شامل) ، و تقابله العكسي هو :

$$\pi_+^{-1} : \pi_+(U_+) \longrightarrow U_+ \subseteq S^2$$

$$(x,y) \longrightarrow \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)$$

و هو تطبيق مفتوح و مستمر أيضاً .

مما سبق نجد أن (U_+, π_+) خارطة محلية على S^2 .

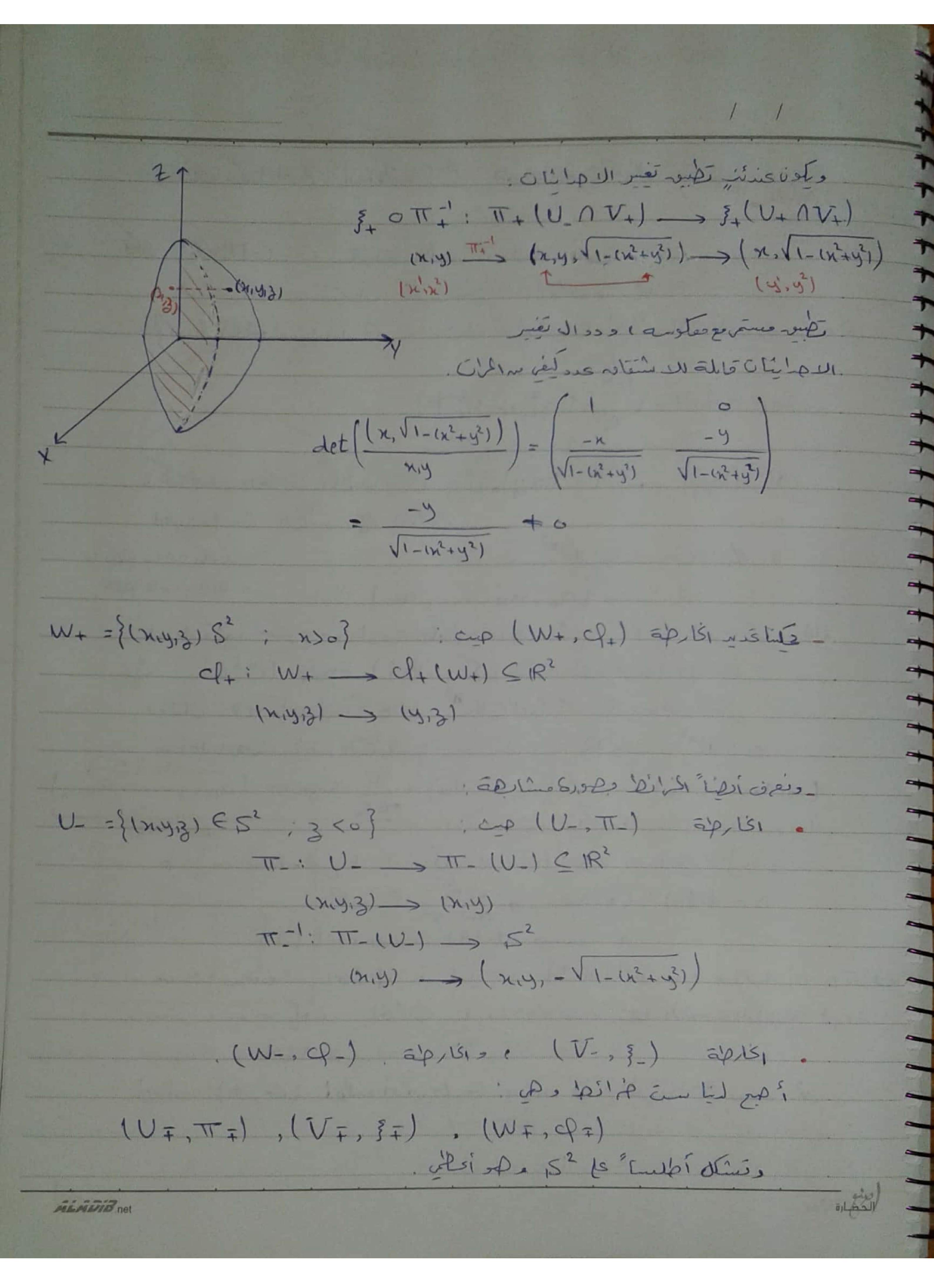
- بصورة مشابهة ، نعرف الخارطة (V_+, ξ_+) حيث :

$$V_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \; ; \; y>0\}$$

النصف الأيمن الموجب من الكرة :

$$\xi_+ : V_+ \longrightarrow \xi_+(V_+) \subseteq S^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,z)$$



/ /

ويكون عندئذٍ تطبيق تغيير الإحداثيات:

$$\xi_+ \circ \pi_+^{-1} : \pi_+(U_- \cap V_+) \longrightarrow \xi_+(U_+ \cap V_+)$$

$$(x,y) \xrightarrow{\pi_+^{-1}} \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right) \longrightarrow \left(x, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)$$

$$(x^1, x^2) \qquad\qquad (y^1, y^2)$$

تطبيق مستمر مع معكوسه ، ودوال تغيير الإحداثيات قابلة للاشتقاق عدد كيفي من المرات.

$$\det\left(\frac{\left(x, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)}{x,y}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} & \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \neq 0$$

- وكذلك تعريف الخارطة (W_+, φ_+) حيث: $W_+ = \{(x,y,z)\ S^2 \ ; \ x>0\}$

$$\varphi_+ : W_+ \longrightarrow \varphi_+(W_+) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (y,z)$$

- ونعرف أيضاً الخرائط بصورة مشابهة:

• الخارطة (U_-, π_-) حيث: $U_- = \{(x,y,z) \in S^2 \ ; \ z<0\}$

$$\pi_- : U_- \longrightarrow \pi_-(U_-) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$$

$$\pi_-^{-1} : \pi_-(U_-) \longrightarrow S^2$$

$$(x,y) \longrightarrow \left(x, y, -\sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)$$

• الخارطة (V_-, ξ_-) ، والخارطة (W_-, φ_-).

أصبح لدينا ست خرائط وهي:

$$(U_\mp, \pi_\mp) \ , (V_\mp, \xi_\mp) \ , (W_\mp, \varphi_\mp)$$

وتشكل أطلساً على S^2 كما هو أعظمي.

لا نستطيع أن نغطي الكرة بخارطة واحدة، بل نحتاج 6 خرائط على الأقل.

/ /

وبالتالي يمكننا القول، أن الكرة S^2 هي منطو تفاضلي بعده 2. معادلة لأن الكرة لها سطح مفرغ أما الثالث فيكون بدلالة الاثنين

2- ليكن $G = GL(n,\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة غير الشاذة، من المرتبة n، سنثبت أن G منطو تفاضلي بعده n^2.

نعلم من مقرر التبولوجيا أن G هي فضاء تبولوجي هاوسدورفي، ودالة المسافة عليه هي:

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}^2 - b_{ij}^2)}$$

وهي تمثل البعد بين المصفوفتين $A = (a_{ij})_n$ ، $B = (b_{ij})$

لنعرف على G التطبيق Φ بالشكل:

$$\Phi : G \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$A \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$$

"يضع عناصر المصفوفة كلها جانب بعضها"

إن Φ تطبيق مفتوح من المجموعة المفتوحة G إلى $\mathbb{R}^{n^2}$ وهو مستمر ومتقابل.

لأنه (G,Φ) خارطة (أطلس مكون من خارطة واحدة) على G.

لإثبات ذلك يكفي أن نثبت أن $\Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ مجموعة مفتوحة.

من أجل ذلك، نأخذ التطبيق:

$$\Delta : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) \longrightarrow \Delta(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}\,\sigma \,(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma_n})$$

يمثل محدد المصفوفة التي عناصرها $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ (مبادلات)

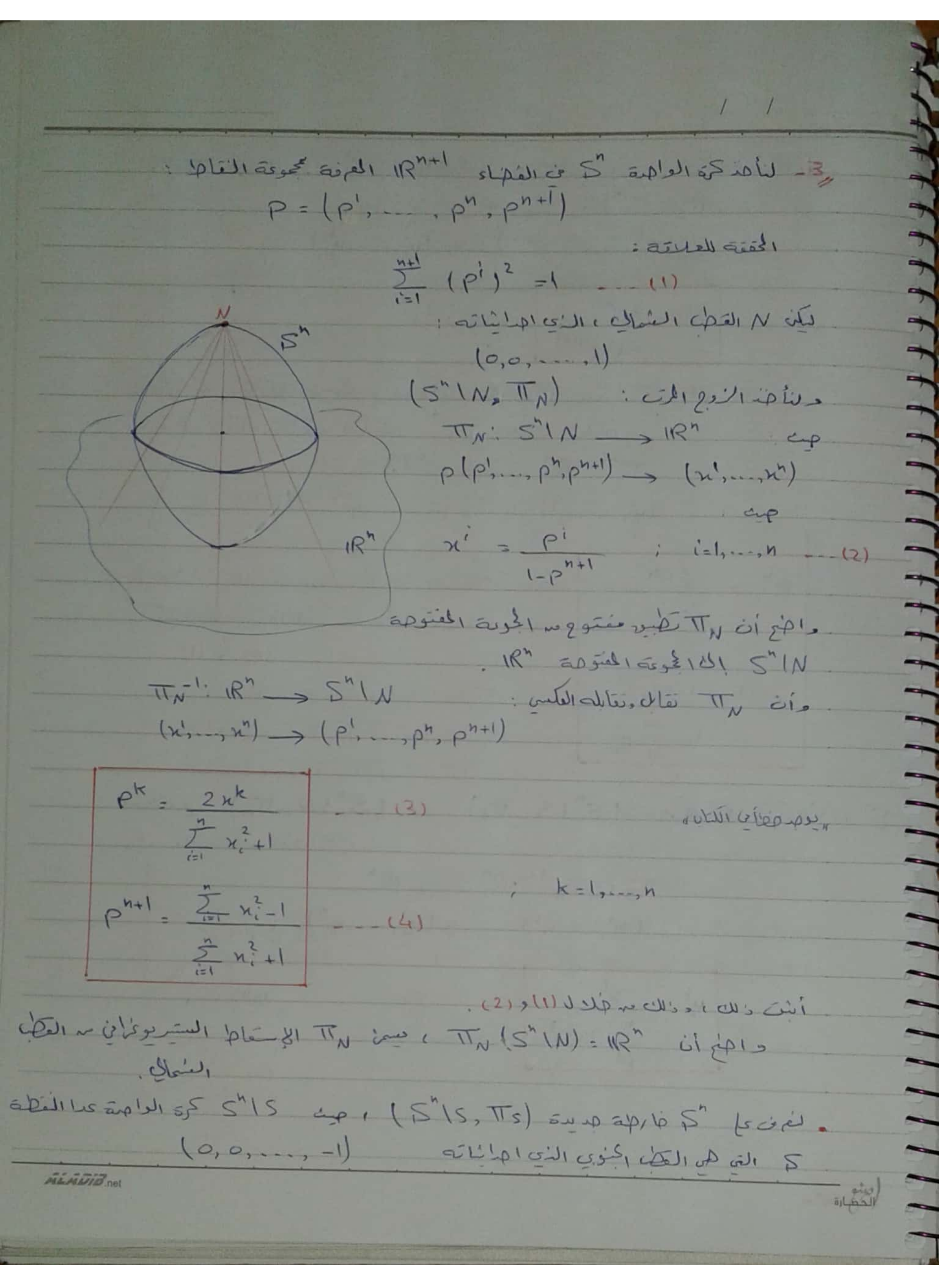
حيث S_n تشمل جميع التبديلات الممكنة لعناصر المصفوفة، وبالتالي التطبيق:

$$\Delta \circ \Phi(G) : G \longrightarrow \underset{\Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}}{\mathbb{R}^{n^2}} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}$$

$$A \longrightarrow \Phi(A) \longrightarrow \det(A)$$

من هنا نجد أن $\Phi(G)$ تساوي $\Delta^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ، وباعتبار أن Δ متقابل مستمر، ومنه يكون $\Phi(G)$ مجموعة مفتوحة لأنها الصورة العكسية لمجموعة مفتوحة $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

أي أن (G,Φ) أطلس أعظمي على G، وأن G منطو تفاضلي بعده n^2.



/ /

3- لنأخذ كرة الواحدة S^n في الفضاء $\mathbb{R}^{n+1}$ المعرفة مجموعة النقاط :

$$P=(p^1,\dots,p^n,p^{n+1})$$

المحققة للعلاقة :

$$\sum_{i=1}^{n+1}(p^i)^2=1 \quad ---(1)$$

ليكن N القطب الشمالي ، الذي احداثياته :

$$(0,0,\dots,1)$$

ولنأخذ الزوج المرتب : $(S^n\setminus N, \pi_N)$

حيث $\pi_N: S^n\setminus N \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$p(p^1,\dots,p^n,p^{n+1}) \longrightarrow (x^1,\dots,x^n)$$

حيث

$$x^i=\frac{p^i}{1-p^{n+1}} \quad ; \quad i=1,\dots,n \quad ---(2)$$

واضح أن π_N تطبيق مفتوح من المجموعة المفتوحة $S^n\setminus N$ إلى المجموعة المفتوحة $\mathbb{R}^n$.

وأن π_N تقابل، وتقابله العكسي : $\pi_N^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n\setminus N$

$$(x^1,\dots,x^n) \longrightarrow (p^1,\dots,p^n,p^{n+1})$$

$$p^k=\frac{2x^k}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+1} \quad ---(3)$$

"يوضح في الكتاب"

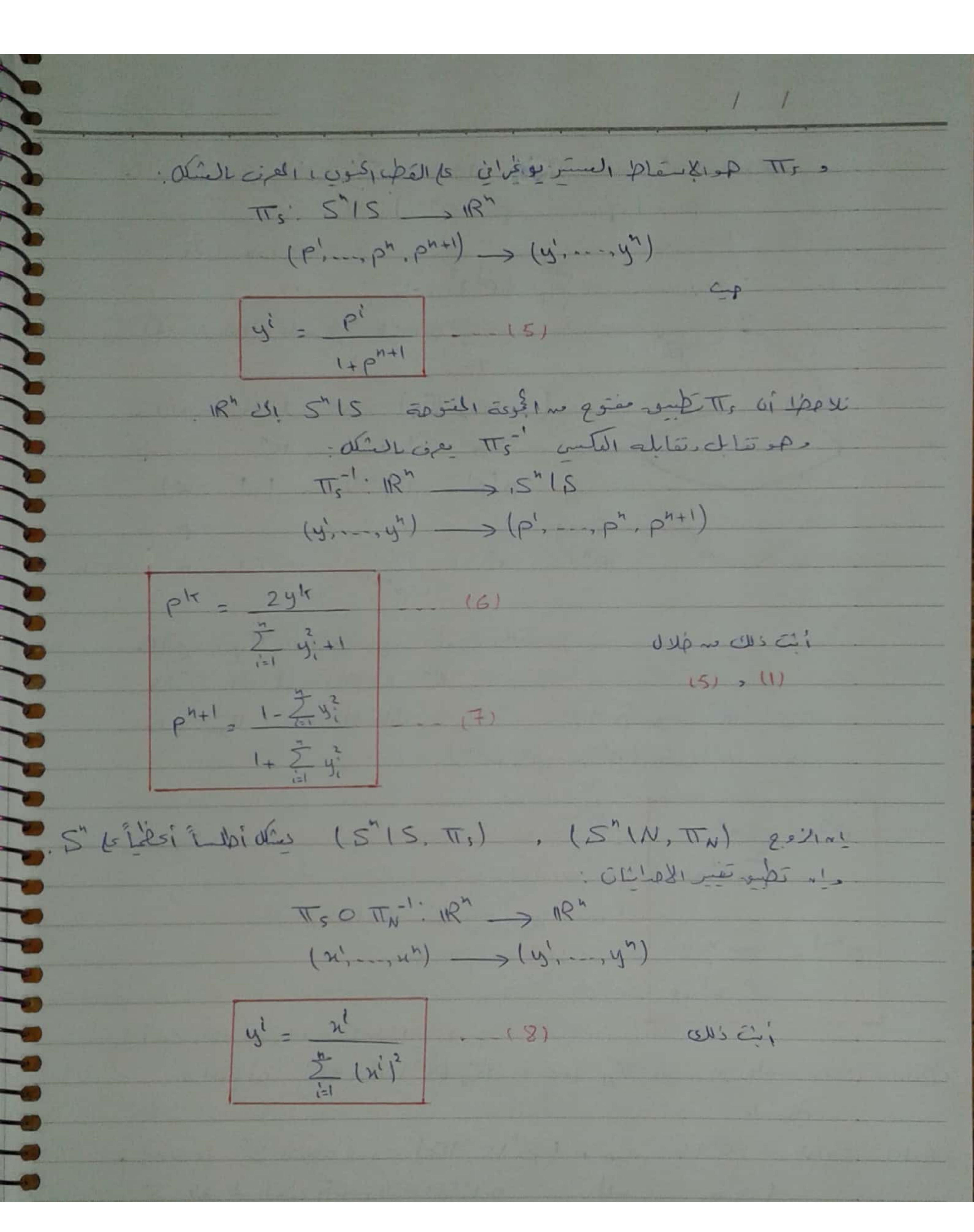
$$; \quad k=1,\dots,n$$

$$p^{n+1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+1} \quad ---(4)$$

أثبت ذلك ، وذلك من خلال (1) و (2) .

واضح أن $\pi_N(S^n\setminus N)=\mathbb{R}^n$ ، يسمى π_N الإسقاط الستيريوغرافي من القطب الشمالي.

. لنعرف على S^n خارطة جديدة $(S^n\setminus S, \pi_S)$ ، حيث $S^n\setminus S$ كرة الواحدة عدا النقطة S التي هي القطب الجنوبي الذي احداثياته $(0,0,\dots,-1)$



/ /

و π_s هو الإسقاط الستريوغرافي على القطب الجنوبي، المعرف بالشكل:

$$\pi_s : S^n \setminus S \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(p^1, \dots, p^n, p^{n+1}) \longrightarrow (y^1, \dots, y^n)$$

حيث

$$y^i = \frac{p^i}{1+p^{n+1}} \quad \dots (5)$$

نلاحظ أن π_s تطبيق مفتوح من المجموعة المفتوحة $S^n \setminus S$ إلى $\mathbb{R}^n$.

وهو تقابل، تقابله العكسي π_s^{-1} يعرف بالشكل:

$$\pi_s^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus S$$

$$(y^1, \dots, y^n) \longrightarrow (p^1, \dots, p^n, p^{n+1})$$

$$p^k = \frac{2y^k}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 1} \quad \dots (6)$$

$$p^{n+1} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2} \quad \dots (7)$$

أثبت ذلك من خلال (1) , (5)

إن الزوج $(S^n \setminus N, \pi_N)$, $(S^n \setminus S, \pi_s)$ يشكل أطلساً أعظمياً على S^n.

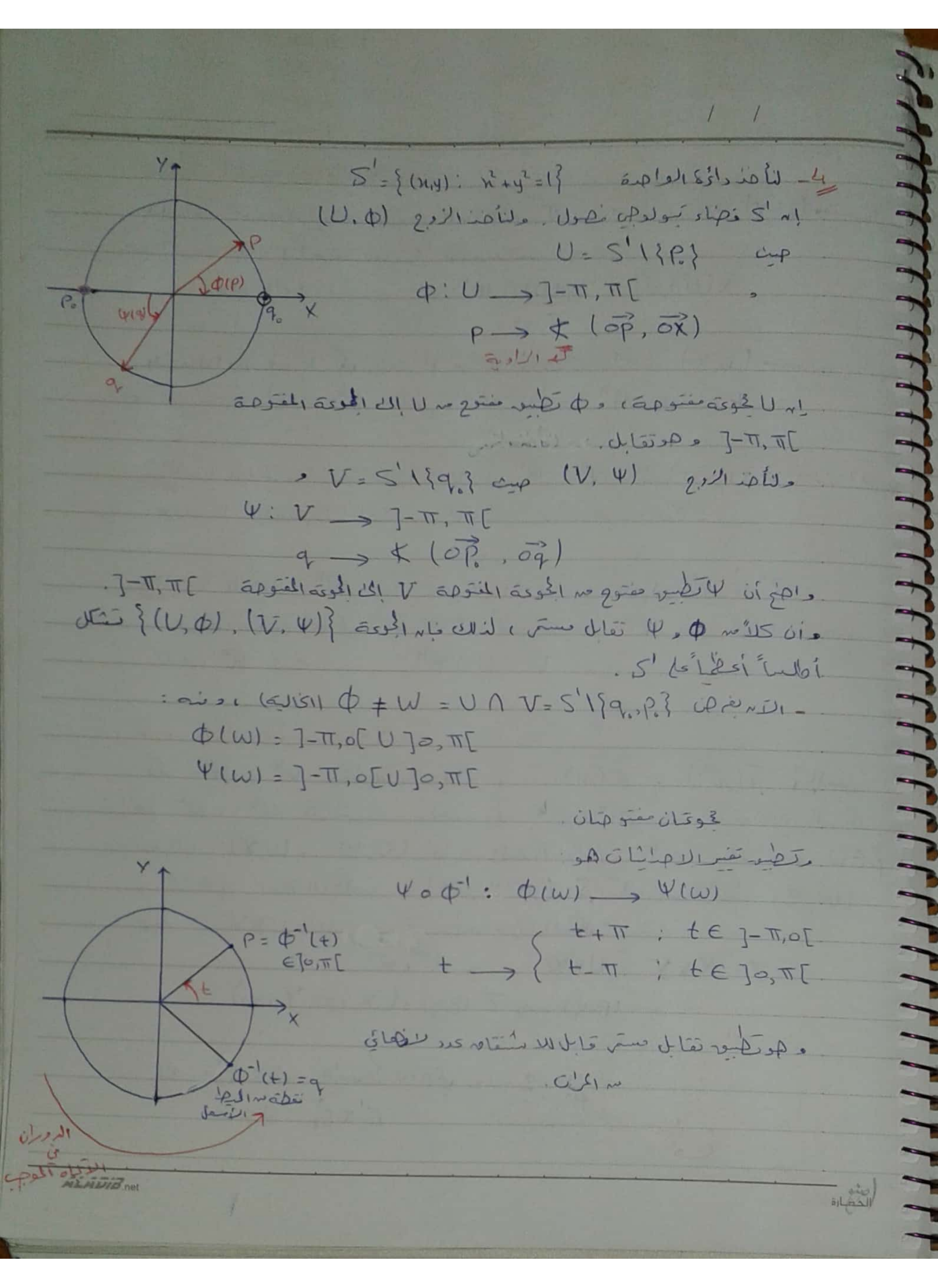
وإن تطبيق تغيير الإحداثيات:

$$\pi_s \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, \dots, x^n) \longrightarrow (y^1, \dots, y^n)$$

$$y^i = \frac{x^i}{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} \quad \dots (8)$$

أثبت ذلك



/ /

4- لنأخذ دائرة الواحدة $S^1 = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

إن S^1 فضاء تبولوجي منفصل. ولنأخذ الزوج (U, Φ)

حيث $U = S^1 \setminus \{P_0\}$

و $\Phi : U \longrightarrow]-\pi, \pi[$

$P \longrightarrow \measuredangle(\vec{op}, \vec{ox})$

قياس الزاوية

إن U مجموعة مفتوحة، و Φ تطبيق مفتوح من U إلى المجموعة المفتوحة $]-\pi, \pi[$ وهو تقابل.

ولنأخذ الزوج (V, Ψ) حيث $V = S^1 \setminus \{q_0\}$ ،

$\Psi : V \longrightarrow]-\pi, \pi[$

$q \longrightarrow \measuredangle(\vec{oP_0}, \vec{oq})$

واضح أن Ψ تطبيق مفتوح من المجموعة المفتوحة V إلى المجموعة المفتوحة $]-\pi, \pi[$.

وأن كلاً من Φ ، Ψ تقابل مستمر، لذلك فإن المجموعة $\{(U,\Phi), (V,\Psi)\}$ تشكل أطلساً أعظمياً على S^1.

- الآن نفرض $W = U \cap V = S^1 \setminus \{q_0, P_0\} \neq \Phi$ الحالية، ومنه:

$\Phi(W) =]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$

$\Psi(W) =]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$

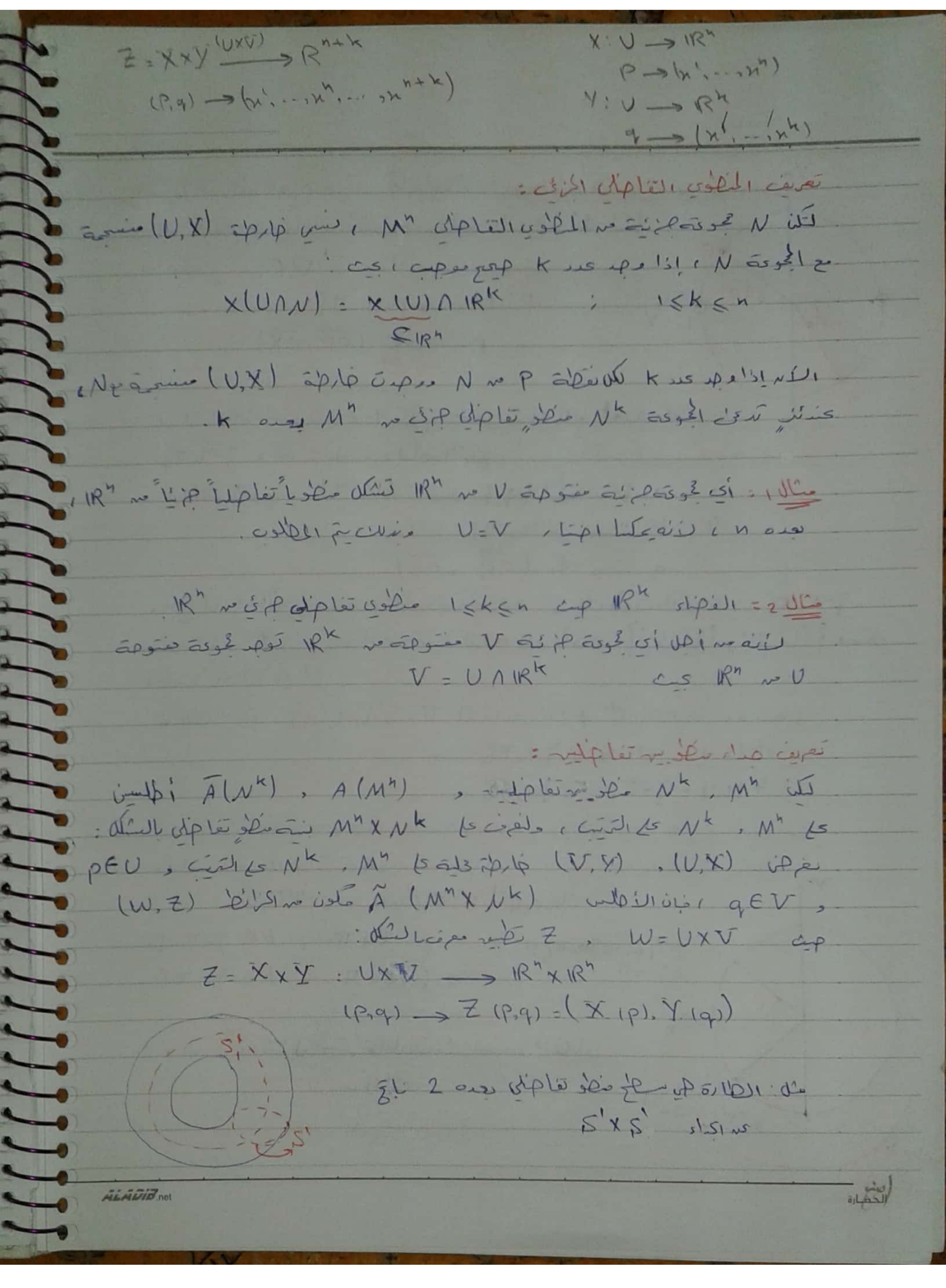
مجموعتان مفتوحتان.

وتطبيق تغيير الإحداثيات هو

$\Psi \circ \Phi^{-1} : \Phi(W) \longrightarrow \Psi(W)$

$$t \longrightarrow \begin{cases} t + \pi & ; t \in]-\pi, 0[\\ t - \pi & ; t \in]0, \pi[\end{cases}$$

وهو تطبيق تقابل مستمر قابل للاشتقاق عدد لانهائي من المرات.



$Z = X\times Y : (U\times V) \longrightarrow R^{n+k}$

$(p,q) \longrightarrow (x^1,\dots,x^n,\dots,x^{n+k})$

$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$p \longrightarrow (x^1,\dots,x^n)$

$Y : V \longrightarrow R^k$

$q \longrightarrow (x'^1,\dots,x'^k)$

تعريف المنطوي التفاضلي الجزئي:

لتكن N مجموعة جزئية من المنطوي التفاضلي M^n ، نسمي خارطة (U,X) منسجمة مع المجموعة N ، إذا وجد عدد k صحيح موجب ، بحيث:

$$X(U\cap N) = \underbrace{X(U)}_{\subseteq \mathbb{R}^n}\cap \mathbb{R}^k \quad ; \quad 1\le k\le n$$

الآن إذا وجد عدد k لكل نقطة p من N وجدت خارطة (U,X) منسجمة مع N ، عندئذٍ تدعى المجموعة N^k منطوٍ تفاضلي جزئي من M^n بعده k.

مثال 1: أي مجموعة جزئية مفتوحة V من $\mathbb{R}^n$ تشكل منطوياً تفاضلياً جزئياً من $\mathbb{R}^n$ ، بعده n ، لأنه يكفينا اختيار $U=V$ ، وبذلك يتم المطلوب.

مثال 2: الفضاء $\mathbb{R}^k$ حيث $1\le k\le n$ منطوي تفاضلي جزئي من $\mathbb{R}^n$ لأنه من أجل أي مجموعة جزئية V مفتوحة من $\mathbb{R}^k$ توجد مجموعة مفتوحة U من $\mathbb{R}^n$ بحيث $V = U\cap \mathbb{R}^k$

تعريف جداء منطويين تفاضليين:

لتكن M^n ، N^k منطويين تفاضليين ، $A(M^n)$ ، $\bar{A}(N^k)$ أطلسين على M^n ، N^k على الترتيب ، ولنفرض على $M^n\times N^k$ بنية منطوٍ تفاضلي بالشكل:

نفرض (U,X) ، (V,Y) خارطة محلية ل M^n ، N^k على الترتيب ، $p\in U$ ، $q\in V$ ، فإن الأطلس $\tilde{A}(M^n\times N^k)$ مكون من الخرائط (W,Z) حيث $W = U\times V$ ، Z تطبيق معرف بالشكل:

$$Z = X\times Y : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

$$(p,q) \longrightarrow Z(p,q) = (X(p), Y(q))$$

مثل: الطارة هي سطح منطوٍ تفاضلي بعده 2 ناتج من جداء $S^1\times S^1$